Aide multicritère à la décision

Méthodes de surclassement

Philippe Lenca

GET / ENST Bretagne
Département LUSSI

Septembre 2004

Plan

Considérations générales

Méthodes de surclassement

Critères

Pseudo-critère

Situations de préférences

ELECTRE I

ELECTRE II

ELECTRE III

Références

Méthodes fondées sur un critère unique de synthèse

Modèle de préférences est exprimé par une fonction unique :

- utilité multi-attribut, somme pondérée
- programmation mathématique
- etc.

Fonction permet de ranger toutes les actions de la meilleure à la moins bonne :

- pas d'incomparabilité
- transitivité
- etc.

Problèmes de classement, choix simple.

Méthodes fondées sur un critère unique de synthèse

Fonction permet de ranger toutes les actions de la meilleure à la moins bonne :

- résultat qui peut sembler très confortable pour le décideur
- mais hypothèses importantes
  - commensurabilité entre les critères, agrégation de données conflictuelles, imprécises peut être difficile
  - forme de la fonction ?
    - additive
    - multiplicative
    - etc.
  - compensation totale entre les critères

Agrégation multicritère

Décision prend en compte n critères $g_1, \ldots, g_n$:

- $g_i \ \mathcal{A} \mapsto V_i$
- pour chaque g_i, les préférences vis-à-vis des niveaux de V_i sont indépendantes des autres critères
- préférences sur les V_i sont un ordre

Exemple : choix de voitures

- `consommation` : R4GTL $\geq$ R21TS $\geq$ ALPIN
- `prix` : ALPIN $\geq$ R21TS $\geq$ R4GTL

Agrégation multicritère

- action a est meilleure que les actions b et c, doit-on connaître la relation entre b et c ?
- résolution d'un problème de décision est un processus temporel où les actions peuvent être incomparables à un moment donné
- conclure à l'incomparabilité de deux actions peut mener à étudier de nouveaux aspects du problème
- additivité entre les critères est-elle une hypothèse raisonnable ?
- commensurabilité entre les critères peut être difficile à obtenir

Concept de surclassement [B. Roy, 60s].

Agrégation multicritère

Trois grandes familles :

- critère unique de synthèse
- méthodes interactives
- méthodes de surclassement

Méthodes de surclassement

- un critère (au moins) n'est pas quantitatif
- les unités d'évaluation des critères sont hétérogènes et leur codage sur une échelle commune est difficile
- la compensation entre critères n'est pas justifiée
- des seuils de préférences ou de véto doivent être pris en compte

Développées par [B. Roy, 60*s*] :

- à l'occasion d'applications réelles
- pour résoudre des difficultés avec l'utilisation d'approche du type critère unique de synthèse

Méthodes de surclassement

Relation de surclassement

Une relation de surclassement est une **relation binaire** S définie dans $\mathcal{A}$ telle que aSb si, étant donné ce que l'on sait des **préférences du décideur** et étant donnée la **qualité des évaluations des actions** et la **nature du problème**, il y a suffisamment d'arguments pour admettre que a est **au moins aussi bonne** que b, sans qu'il y ait de raison importante de **refuser cette affirmation**.

Méthodes de surclassement

Si *a* surclasse *b* alors *a* est au moins aussi bonne que *b*.
Une relation de surclassement :

- n'a aucune raison d'être complète
- n'a aucune raison d'être transitive
- ne permet pas en général d'obtenir immédiatement un rangement total des actions
- la dominance entraîne le surclassement
- est reflexive

Méthodes de surclassement

Différences entre les méthodes de surclassement vont provenir notamment de la façon de formaliser et d'exploiter la définition du surclassement :

- ELECTRE
- PROMETHEE
- MELCHIOR
- etc.

Méthodes de surclassement procèdent en deux étapes :

- construction de la relation de surclassement
- exploitation de la relation de surclassement en fonction de la problématique choisie

Méthodes de surclassement

Problèmes considérés :

- ensemble fini d'actions, $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
- famille cohérente de pseudo-critères, $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$
- une ou plusieurs problématiques de décision [Roy, 1985]
  - choisir une ou plusieurs action(s) : problématique de choix/sélection P_α (1
  - déterminer toutes les bonnes actions : problématique de tri/affectation P_β
  - classer les actions de la meilleure à la moins bonne : problématique de rangement/classement P_δ
  - décrire les actions et/ou leurs conséquences de façon formalisée : problématique P_γ

Problématiques de décision

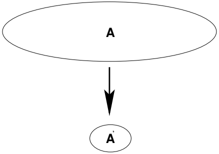


FIG. 1: Problématique α

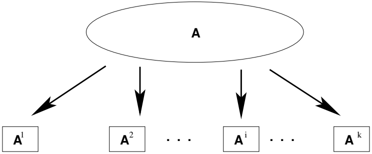


FIG. 2: Problématique β

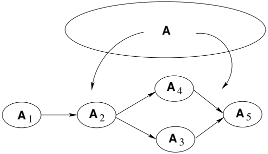


FIG. 3: Problématique γ

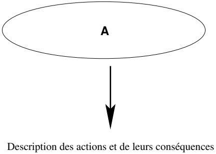


FIG. 4: Problématique δ

Méthodes de surclassement

L'affirmation aSb est acceptée si :

- il y a concordance : une majorité de critères sont concordants avec aSb (**principe de majorité**)
- il n'y a pas discordance : aucun des critères non-concordants (discordant) réfute fortement aSb (**principe de respect des minorités**)

Deux indices :

- la concordance : mesurer les arguments en faveur de **au moins aussi bonne**
- la discordance : mesurer s'il y a des raisons importantes de **refuser cette affirmation**

Méthodes de surclassement

Concordance/Discordance

Les indices de concordance et discordance mettent en œuvre les principes de majorité et de respect des minorités afin d'affirmer le surclassement (ou non) de a sur b.
Cela peut se réaliser de différentes façons et avec des niveaux d'exigence plus ou moins forts.

Prises en compte :

- de seuils, les valeurs prises par un critère peuvent être imprécises, incertaines
- de logiques non compensatoires
- de l'incomparabilité
- de notion de véto

Méthodes de surclassement

Concordance partielle

On mesure la contribution, $c_i(a,b) \in [0,1]$, de chaque critère à la proposition aSb.

$$c_i(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ssi } g_i \text{ n'est absolument pas en faveur de } aSb \\ 1, & \text{ssi } g_i \text{ est totalement en faveur de } aSb \\ \in]0,1[, & \text{ssi } g_i \text{ est partiellement en faveur de } aSb \end{cases}$$

Méthodes de surclassement

Concordance globale

On mesure la concordance, $c(a, b) \in [0, 1]$, à l'aide des contributions de chaque critère.

$$c(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{si aucun critère n'est en faveur de } aSb \\ 1, & \text{si tous les critères sont en faveur de } aSb \\ \in]0,1[, & \text{si certains critères seulement sont en faveur de } aSb \end{cases}$$

Méthodes de surclassement

Idem avec la discordance.

Méthodes de surclassement

Famille des méthodes ELECTRE
ELicitation Et Choix Traduisant la REalité :

- ELECTRE I et ELECTRE IS : choisir une ou plusieurs action(s) (P_α)
- ELECTRE TRI : déterminer toutes les bonnes actions (P_β)
- ELECTRE II, ELECTRE III et ELECTRE IV : classer les actions de la meilleure à la moins bonne (P_δ)

http://www.lamsade.dauphine.fr/logiciel.html

Critères

Critère

Un **critère** est une fonction g définie sur $\mathcal{A}$ et prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné R, $g : A \longrightarrow$ R), et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue.

- *vrai-critère* : la structure de préférence sous-jacente est une structure de pré-ordre total (“modèle traditionnel”)
- *quasi-critère* : la structure de préférence sous-jacente est une structure de quasi-ordre (“modèle à seuil”)
- *critère d'intervalle* : la structure de préférence sous-jacente est une structure d'ordre d'intervalle (“modèle à seuil variable”)
- pseudo-critère : la structure de préférence sous-jacente est une structure de pseudo-ordre

Famille de critères

Famille de critères

L'élaboration d'une famille $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de critères pour représenter les différents points de vue est un opération délicate qui doit permettre de modéliser les préférences à un niveau global.

Famille cohérente de critères

Une famille de critères est cohérente si elle est conforme aux trois exigences suivantes [Roy, 1985], [Roy et Bouyssou, 1993] :

- exhaustivité
- cohésion
- non redondance

Famille **cohérente** de critères

Exhaustivité

Les critères pris en compte doivent décrire le problème de manière suffisamment exhaustive. C'est-à-dire que si deux alternatives a et b sont telles que $\forall i,\ g_i(a) = g_i(b)$, alors il ne doit pas exister d'alternative c telle que la relation de c à a soit différente de la relation de c à b.

$$\text{si } \forall i,\ g_i(a) = g_i(b) \text{alors } \forall c \ \ :$$

$$cHb \Rightarrow cHa, \forall H \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}$$

$$bH'c \Rightarrow aH'c, \forall H' \in \{I, P, Q, R, \sim, \succ, S\}$$

Famille cohérente de critères

Cohésion

Les critères ne doivent pas *casser* les propriétés de chaque critère pris individuellement (a est d'autant meilleure que $g_i(a)$ est élevé).

$$\text{si } \forall j \in \mathcal{F} \setminus \{k\}, g_j(b^k) = g_j(b), g_k(b^k) \geq g_k(b)$$

$$\text{si } \forall j \in \mathcal{F} \setminus \{k\}, g_j(a) = g_j(a_k), g_k(a) \geq g_k(a_k),$$

l'une au moins des deux inégalités ci-dessus étant stricte, alors :

$$bPa \Rightarrow b^k Pa_k,$$

$$bQa \Rightarrow b^k \succ a_k,$$

$$bIa \Rightarrow b^k Sa_k.$$

Famille cohérente de critères

Non redondance

Il faut éliminer de $\mathcal{F}$ les critères superflus, par souci d'économie. $\mathcal{F}$ doit donc être telle que, si on lui enlève un critère, elle ne satisfait plus l'un au moins des deux axiomes précédents.

Pseudo-critère

Le modèle de pseudo-critère permet d'intégrer des éléments mal définis ou connus avec une marge de précision.
On suppose que les préférences sont croissantes avec les performances.
Soit g_j un critère ($g_j : \mathcal{A} \mapsto I\!R$), a, $b \in \mathcal{A}$ et u la différence d'évaluation sur g_j entre a et b :

$$u = g_j(a) - g_j(b)$$

Pseudo-critère ($u = g_j(a) - g_j(b)$)

- si $u \simeq 0$, alors aI_jb (a est indifférente à b)
- si $g_j(a)$ croît, soit $q_j(g_j(b))$ (seuil d'indifférence du critère g_j) la différence à partir de laquelle a et b ne sont plus indifférentes
  - si la différence est suffisamment grande alors aP_jb (a est strictement préférée à b).
    aP_jb ne sera acceptée que jusqu'à une certaine valeur $p_j[g_j(b)]$ (seuil de préférence stricte du critère g_j).
    Généralement, on a $p_j[g_j(b)] \neq q_j[g_j(b)]$ avec $p_j[g_j(b)] > q_j[g_j(b)]$.
  - si $q_j[g_j(b)] < u \leq p_j[g_j(b)]$ on peut hésiter entre l'indifférence et la préférence stricte. On note alors aQ_jb cette situation appelée préférence faible.

Pseudo-critère ($u = g_j(a) - g_j(b)$)

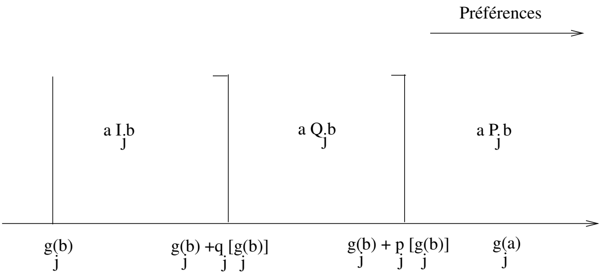


FIG. 5: Pseudo-critère et préférences.

Pseudo-critère

Pseudo-critère

On appelle pseudo-critère une fonction-critère g à laquelle est associée deux fonctions seuils $q_g[g(b)]$ et $p_g[g(b)]$ vérifiant :
$\forall a, b, \in \mathcal{A}$
Les conditions de monotonie,

$$\frac{q_g[g(a)]-q_g[g(b)]}{g(a)-g(b)} \geq -1 \text{ et } \frac{p_g[g(a)]-p_g[g(b)]}{g(a)-g(b)} \geq -1$$

et telles que,

$$g_j(a) \geq g_j(b) \Leftrightarrow \begin{cases} aI_j b \Leftrightarrow g_j(a) - g_j(b) \leq q_j[g_j(b)] \\ aQ_j b \Leftrightarrow q_j[g_j(b)] < g_j(a) - g_j(b) \leq p_j[g_j(b)] \\ aP_j b \Leftrightarrow g_j(a) - g_j(b) > p_j[g_j(b)] \end{cases}$$

Pseudo-critère

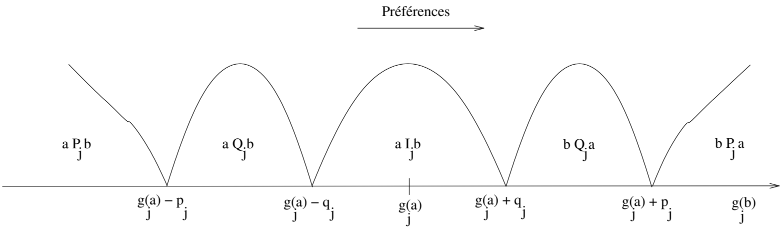


FIG. 6: Pseudo-critère et préférences.

Cas particuliers :

- $p_j = q_j$, quasi-critère
- $q_j = 0$, pré-critère
- $p_j = q_j = 0$, vrai-critère

Pseudo-critère et l'imprécision

Considérons un critère prenant en compte une unique dimension sur laquelle chaque action $a \in A$ est évaluée par un point (fig. 7):

- le plus probable $c(a)$
- un point par excès $c^+(a)$
- et un par défaut $c^-(a)$

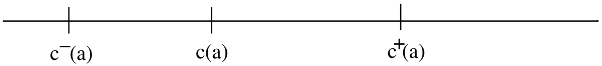


FIG. 7: $a \in [c^-(a); c^+(a)]$.

Evaluation entourée d'une marge de dispersion pas forcement symétrique.

Pseudo-critère et l'imprécision

On peut raisonnablement définir le critère g en posant $g(a) = c(a)$.
Sans informations supplémentaires, une différence faible entre $g(a)$ et $g(b)$ ne nous permet pas de conclure une préférence stricte.
Une façon naturelle de procéder :

- aPb ssi $c^{-}(a) > c^{+}(b)$ (cas où les intervalles sont disjoints)
- si $c(b)$ croît les deux intervalles vont se chevaucher
  - indifférence I dès que l'évaluation la plus probable de chaque action est comprise dans l'intervalle de l'autre action
  - préférence faible Q dans la situation intermédiaire

Pseudo-critère et l'imprécision

On peut montrer que si les écarts $c^-(a) - c(a)$ et $c^+(a) - c(a)$ ne dépendent de l'action a qu'au travers de $c(a)$, le mode de comparaison par intervalles peut être modélisé à l'aide d'un pseudo critère :

Si $\forall a \in A$,

$$c^-(a) = c(a) - (\alpha' + \beta' \, c(a))$$

$$c^+(a) = c(a) + (\alpha + \beta \, c(a))$$

alors on a le pseudo critère tel que, $\forall a \in A$,

$$g(a) = c(a)$$

$$p(g(a)) = \frac{\alpha+\alpha'+(\beta+\beta') \, g(a)}{1-\beta'}$$

$$q(g(a)) = \min[\alpha + \beta \, g(a); \frac{\alpha'+\beta' \, g(a)}{1-\beta'}]$$

Situations de préférences

aSb : il y a suffisamment d'arguments en faveur de a **est au moins aussi bonne que** b.

Arguments basés sur :

- les évaluations de a et b
  - $(g_1(a), \ldots, g_n(a))$
  - $(g_1(b), \ldots, g_n(b))$
- d'éléments sur les préférences du décideur
  - poids sur les critères
  - fonctions seuils

Quatre situations de préférences

Situations	Relations	Représentations
aSb et non bSa	aPb	
non bSa et bSa	bPa	
aSb et bSa	aIb	
non aSb et non bSa	aRb	

ELECTRE I

Problème du choix :

- obtenir le plus petit sous-ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ tel que toute action qui n'est pas dans $\mathcal{N}$ est surclassée par au moins une action de $\mathcal{N}$
- et tel que les actions de $\mathcal{N}$ soient incomparables entre elles

Formellement :
$\forall a,\ b \in \mathcal{A}$ trouver $\mathcal{N}$ tel que

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}, \forall b \notin \mathcal{N}, \exists a \in \mathcal{N}, aSb$$

$$\forall a \in \mathcal{N}, \forall b \in \mathcal{N}, a \not{S} b, b \not{S} a$$

Construction de la relation de surclassement

Indice de concordance $c(a, b)$: $\forall a,\ b \in A$

$$c(a, b) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{p} p_j} \sum_{j / g_j(a) \geq g_j(b)} p_j$$

- varie de 0 à 1 (normalisation des poids)
- mesure les arguments en faveur de "*a* surclasse *b*"
- correspond à une procédure où chaque groupe de votants (mesuré par son importance) exprime sa préférence de *a* sur *b*.
- ne nécessite pas la comparabilité entre les critères (comparaisons critère par critère)

Construction de la relation de surclassement

Indice de discordance $d(a,b)$ (critères qualitatifs et comparables) :

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall j, g_j(a) \geq g_j(b), \\ \frac{1}{\delta} \max_j [g_j(b) - g_j(a)] \text{ sinon} \\ \text{ où } \delta = \max_{c,d,j}[g_j(c) - g_j(d)] \end{cases}$$

- mesure la force d'un argument (maximal) en défaveur de "a est au moins aussi bonne que b"
- exprime le fait que le décideur ne peut accepter la préférence de a sur b si b est largement meilleur que a sur un critère (quel que soit le nombre de critères en faveur de a sur b)
- indice $d(a,b)$ est donc d'autant plus grand que la préférence de a sur b est faible sur un critère

Construction de la relation de surclassement

Discordance $d(a, b)$ (critères non comparables) :

- ensembles de contraintes $\mathcal{D}_j$ de la forme $\{(=, x_j, y_j)\}$, $\{(\leq, x_j, y_j)\}$,
- ou plus généralement $\{(\mathrm{R}, x_j, y_j)\}$ ou R est une relation binaire exprimant des contraintes

Par exemple, l'ensemble $\{(=, x_2, y_2)\}$ signifie que sur le critère 2 si $g_2(a) = x_2$ et $g_2(b) = y_2$ on refusera le surclassement de b par a, et ce quel que soient les arguments en faveur de a sur b.
Discordance exprime la notion de véto.

Définition de la relation de surclassement S

- à l'aide de la concordance
  à partir d'un seuil $\hat{c}$
  ie. qu'il y a suffisamment d'arguments en faveur de a
- et de la discordance
  soit à partir d'un seuil $\hat{d}$ si les critères sont commensurables
  ou bien à partir des ensembles de contraintes
  ie. qu'il n'y a pas assez d'arguments contre le surclassement

Définition de la relation de surclassement S

$$aSb \iff \begin{cases} c(a,b) \geq \hat{c} \\ d(a,b) \leq \hat{d} \end{cases}$$

ou par

$$aSb \iff \begin{cases} c(a,b) \geq \hat{c} \\ \forall j \; (\mathrm{R}, g_j(a), g_j(b)) \notin \mathcal{D}_j \end{cases}$$

La relation de surclassement (nette) S peut être représentée par un graphe orienté $G = (\mathcal{A}, U)$ où $U = \{(a_i, a_j) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} / a_i S a_j\}$.

Exploitation de la relation de surclassement S

Problématique - on recherche un sous-ensemble $\mathcal{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall b \in (\mathcal{A} - \mathcal{N}),\ \exists a \in \mathcal{N}\ /\ aSb \\ \forall (a,b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N},\ a \not S b \end{cases}$$

- première condition est une propriété de complétude (sous-ensemble S-dominant)
- la seconde de minimalité.

La recherche de $\mathcal{N}$ est équivalente à la recherche du noyau du graphe G représentant S.

Exploitation de la relation de surclassement S

On peut avoir :
aSb, bSc et cSa *ie.* un graphe sans noyau, aSb, bSc, cSd et dSa *ie.* un graphe avec deux noyaux, mais aussi aSb aSc (sans bSc ni cSb) *ie.* un graphe avec un noyau unique.

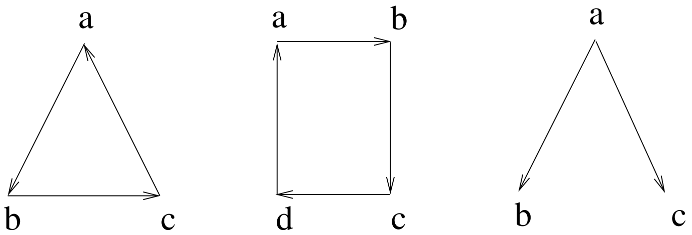


FIG. 8: Exemples de noyaux dans un graphe.

Exploitation de la relation de surclassement S

Si le graphe G est sans circuit alors le noyau $\mathcal{N}$ existe et est unique.

Sinon le noyau n'est pas unique :

- on peut considérer les actions des circuits comme ex æquo et remplacer chaque circuit par une action unique
- on peut utiliser la notion de quasi-noyau de faiblesse minimum [Vincke, 1977]

Exploitation de la relation de surclassement S

Un quasi-noyau Q du graphe $G = (\mathcal{A}, U)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall (a,b) \in Q \times Q, \; a \not S b \\ \forall b \notin Q \begin{cases} \exists \; a \in Q / aSb \\ \text{ou } \exists \; a \in A \text{ et } c \in Q / aSb, \; cSa \end{cases} \end{cases}$$

Tout graphe possède au moins un quasi-noyau.
La faiblesse de Q est définie par :
$f(Q) = |\{b \in A - Q / \nexists a \in Q \; aSb\}|$
Le quasi-noyau Q est un noyau si et seulement si $f(Q) = 0$.

Exemple [Vincke, 1989]

Choix d'une voiture (sept modèles, quatre critères) :

	1	2	3	4	5	6	7	Poids
Prix	300	250	250	200	200	200	100	5
Confort	E	E	M	M	M	F	F	4
Vitesse	R	M	R	R	M	R	M	3
Ligne	S	S	S	O	S	S	O	3

où (E = Excellent, M = Moyen, F = Faible, R = Rapide, S = Soignée, O = Ordinaire)

Exemple [Vincke, 1989]

Les indicateurs de concordance sont :

$$1/15 * \begin{vmatrix} - & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 12 & - & 12 & 7 & 10 & 7 & 10 \\ 11 & 11 & - & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 8 & 8 & 12 & - & 12 & 12 & 10 \\ 8 & 11 & 12 & 12 & - & 12 & 10 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & - & 10 \\ 5 & 8 & 5 & 8 & 8 & 9 & - \end{vmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6	7	Poids
Prix	300	250	250	200	200	200	100	5
Confort	E	E	M	M	M	F	F	4
Vitesse	R	M	R	R	M	R	M	3
Ligne	S	S	S	O	S	S	O	3

Exemple [Vincke, 1989]

On refuse le surclassement de b par a si :

- $g_{prix}(a) = 300$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{prix}(a) = 250$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{confort}(a) = F$ et $g_{confort}(b) = E$.

Pour $\hat{c} = \frac{12}{15}$, on obtient le graphe de surclassement :

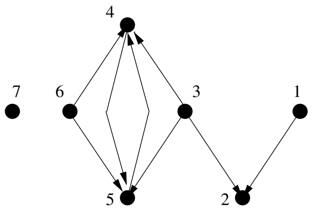


FIG. 9: Surclassement du choix d'une voiture.

Exemple [Vincke, 1989]

Noyaux du graphe : {2, 4, 7} et {2, 5, 7}.
Les actions 4 et 5 peuvent être considérée comme ex æquo.

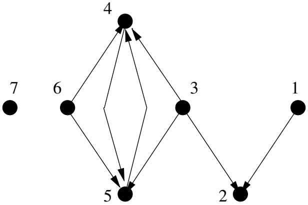


FIG. 10: Surclassement du choix d'une voiture.

Exemple

Les actions du noyau sont les *bonnes actions*.
On doit donc les analyser en finesse et plus précisément tester la robustesse du noyau en faisant varier les paramètres de la méthode :

- p_i
- $\hat{c}$
- $\hat{d}$
- les données $\mathcal{A}$

Cette dernière phase peut servir à départager les actions du noyau.
Voir cours sur l'analyse de *robustesse et de sensibilité*.

ELECTRE II

La méthode ELECTRE II vise à ranger les actions de la meilleure à la moins bonne (probématique du rangement).
Concordance et discordance :

- sont définies comme dans ELECTRE I
- on fixe deux seuils $\hat{c}_1$ et $\hat{c}_2$ tels que $\hat{c}_1 > \hat{c}_2$.

On construit deux relations de surclassement :

- une relation de surclassement fort S^F
- une relation de surclassement faible S^f

Construction de la relation de surclassement

$$aS^F b \iff \begin{cases} c(a,b) \geq \hat{c}_1 \\ \sum_{j/g_j(a)>g_j(b)} p_j > \sum_{j/g_j(a)<g_j(b)} p_j \\ (g_j(a), g_j(b)) \notin \mathcal{D}_j, \forall j \end{cases}$$

$$aS^f b \iff \begin{cases} c(a,b) \geq \hat{c}_2 \\ \sum_{j/g_j(a)>g_j(b)} p_j > \sum_{j/g_j(a)<g_j(b)} p_j \\ (g_j(a), g_j(b)) \notin \mathcal{D}_j, \forall j \end{cases}$$

La discordance peut aussi donner lieu à deux niveaux de sévérité en construisant, pour chaque critère j, deux ensembles $\mathcal{D}_j^1$ et $\mathcal{D}_j^2$ tels que $\mathcal{D}_j^2 \subset \mathcal{D}_j^1$.

Exploitation de la relation de surclassement S

Déterminer :

- l'ensemble $\mathcal{B}$ des actions qui ne sont surclassées fortement par aucune autre action (on a éliminé les circuits de S^F)
- puis l'ensemble $\mathcal{A}^1$ des actions de $\mathcal{B}$ qui ne sont surclassées faiblement par aucune autre action de $\mathcal{B}$ (en ayant préalablement éliminé les circuits de S^f)

$\mathcal{A}^1$ constitue la première classe du rangement, et la procédure recommence dans l'ensemble des actions restantes.

Exploitation de la relation de surclassement S

Un deuxième préordre complet est construit de manière analogue, mais en commençant par la classe la moins bonne (les actions qui n'en surclassent aucune autre) et en remontant vers les meilleures classes.

Remarquons que si une action n'en surclasse aucune autre et n'est surclassée par aucune action, elle se trouvera en tête du premier rangement et en queue du deuxième.

C'est pourquoi, si les deux préordres ne sont pas trop proches, il faudra approfondir l'étude. Sinon, un préordre "médian" est proposé au décideur.

Dans les deux cas, une analyse de robustesse est nécessaire.

Exemple [Vincke, 1989]

$$1/15 * \begin{vmatrix} - & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 12 & - & 12 & 7 & 10 & 7 & 10 \\ 11 & 11 & - & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 8 & 8 & 12 & - & 12 & 12 & 10 \\ 8 & 11 & 12 & 12 & - & 12 & 10 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & - & 10 \\ 5 & 8 & 5 & 8 & 8 & 9 & - \end{vmatrix}$$

	1	2	3	4	5	6	7	Poids
Prix	300	250	250	200	200	200	100	5
Confort	E	E	M	M	M	F	F	4
Vitesse	R	M	R	R	M	R	M	3
Ligne	S	S	S	O	S	S	O	3

On refuse toujours le surclassement de b par a si :

- $g_{prix}(a) = 300$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{prix}(a) = 250$ et $g_{prix}(b) = 100$ **ou**
- $g_{confort}(a) = F$ et $g_{confort}(b) = E$.

Exemple [Vincke, 1989]

$\hat{c}_1 = \frac{12}{15}$: on obtient la relation de surclassement

$$S^F = \{(2,1),(2,3),(5,3),(5,6),(4,5),(4,6),(4,3),(5,4)\}$$

$\hat{c}_2 = \frac{11}{15}$: on obtient la relation de surclassement

$$S^f = S^F + \{(3,1),(3,2),(5,2),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

Les couples $(6,1)$ et $(6,2)$ sont exclus par l'ensemble de discordance.

Exemple [Vincke, 1989]

$\sum_{j/g_j(a)>g_j(b)} p_j > \sum_{j/g_j(a)<g_j(b)} p_j$ élimine les couples :

$$(4,5),(5,4),(3,2),(6,4),(6,5)$$

D'où :

$$S^F = \{(2,1),(2,3),(5,3),(5,6),(4,6),(4,3)\}$$

$$S^f = S^F + \{(3,1),(5,2),(6,3)\}$$

L'ensemble $\mathcal{B}$ des actions qui ne sont fortement surclassées par aucune autre est $\{2,4,5,7\}$.
L'action 2 est faiblement surclassée dans S^f, donc $\mathcal{A}^1 = \{4,5,7\}$.

Exemple [Vincke, 1989]

On recommence avec les actions restantes :
$B' = \{2,6\}$, $A^2 = \{2,6\}$.
$B'' = \{1,3\}$, $A^3 = \{3\}$.
$B''' = \{1\}$, $A^4 = \{1\}$.

Exemple [Vincke, 1989]

On recommence ensuite dans l'ordre inverse. L'ensemble des actions qui n'en surclassent fortement aucune autre est $C = \{1, 3, 6, 7\}$.
Dans C, l'ensemble des actions qui n'en surclassent faiblement aucune autre est $D^1 = \{1, 7\}$.
On continue :
$C' = \{3, 6\}$, $D^2 = \{3\}$.
$C'' = \{2, 6\}$, $D^2 = \{2, 6\}$.
$C''' = \{4, 5\}$, $D^3 = \{4, 5\}$.

Exemple [Vincke, 1989]

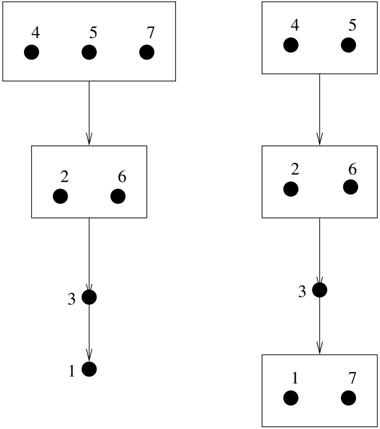


FIG. 11: Surclassement du choix d'une voiture.

ELECTRE III et ELECTRE IV

Problématique : étant donné un ensemble $\mathcal{A}$ fini d'actions évaluées sur une famille cohérente de critères, partitionner $\mathcal{A}$ en classes d'équivalence et fournir un ordre non nécessairement complet exprimant les positions relatives de ces classes.

- construction d'une ou plusieurs relations de surclassement sur l'ensemble $\mathcal{A}$
- rangement des actions : à partir de la ou des relations de surclassement, générer deux classements (construits différemment) ; l'intersection des deux préordres conduit à un préordre partiel ne retenant que les comparaisons les plus fondées entre les actions

ELECTRE III et ELECTRE IV

Première étape :

- ELECTRE III [Roy, 1978] : obtenir une relation de surclassement floue
- ELECTRE IV [Hugonnard et Roy, 1982] : obtenir un ensemble de relations de surclassement nettes emboîtées

ELECTRE III et ELECTRE IV

Données relatives aux actions dictent le choix de la méthode :

- le décideur est en mesure d'exprimer l'importance relative des pseudo-critères en les pondérant : ELECTRE III
- le décideur ne peut ou ne désire pas évaluer l'importance relative des pseudo-critères tout en estimant qu'aucun critère n'est négligeable ni prépondérant face à un regroupement quelconque d'une moitié des critères : ELECTRE IV
- le décideur a construit une matrice de comparaison par paires des actions (matrice de nombres compris entre 0 et 1) par une méthode donnée : utilisation d'un algorithme de classement (matrice de degrés de crédibilité)

ELECTRE III

Pour chaque critère, calculer deux indicateurs par paire d'actions :

- le premier exprime dans quelle mesure les performances des actions sur les critères entrent en concordance avec l'assertion "a est au moins aussi bonne que b"
- le second indique dans quelle mesure elles s'y opposent

Calculs :

- les indicateurs de concordance sont agrégés en tenant compte des poids pour obtenir un **indice de concordance global**.
- les indicateurs de discordance ne sont pas agrégés.
- le degré de **crédibilité**, $dc(a, b)$, que l'on accorde à "a surclasse b" est obtenu à partir de l'indice de concordance affaibli par les indices de discordance.

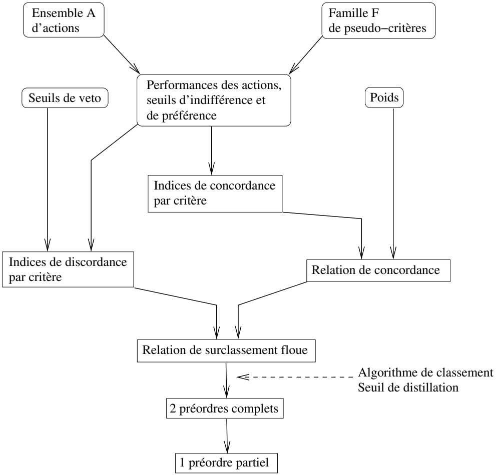


FIG. 12: Schéma général de ELECTRE III.

Seuil de veto

Seuil de veto

On appellera **seuil de veto** v_j du critère j la différence à partir de laquelle l'affirmation "a est tellement meilleure que b sur le critère j qu'en aucun cas, b ne pourra être considérée meilleure que a quelles que soient les performances de b et a sur tous les autres critères." sera prise en compte dans l'élaboration de la préférence globale.

On parle de veto-préférence PV_j pour la relation associée et on a : $aPV_jb \Leftrightarrow v_j[g_j(b)] < g_j(a) - g_j(b)$.

Modes de calcul des seuils

2×2 situations :

- préférences croissantes ou décroissantes avec les performances
- seuils directs (calculés à partir de la performance de l'action la moins préférée) ou inverses (calculés à partir de la performance de l'action la meilleure)

Quatre situations :

- Cas 1 : préférences croissantes et seuils directs
- Cas 2 : préférences décroissantes et seuils directs
- Cas 3 : préférences croissantes et seuils inverses
- Cas 4 : préférences décroissantes et seuils inverses

Modes de calcul des seuils

Seuils

Les seuils sont des fonctions affines des performances :

$$seuil(g_j(a)) = \alpha \times g_j(a) + \beta$$

α et β sont à la charge de l'utilisateur pour chaque critère :

- Cas 1 : $\alpha \geq -1$
- Cas 2 : $\alpha \leq 1$
- Cas 3 : $\alpha \leq 1$
- Cas 4 : $\alpha \geq -1$
- α et β ne doivent pas donner une valeur de seuil négative
- $q_j(.) \leq p_j(.) \leq v_j(.)$

Modes de calcul des seuils

Remarques : lorsque les seuils sont inverses (coefficients de la fonction affine noté $'$) on réalise une transformation (valable pour tous les seuils) pour obtenir des seuils directs et utiliser le même algorithme de comparaison par paires :

- Cas 3 : $\alpha = \frac{\alpha'}{1-\alpha'}$ et $\beta = \frac{\beta'}{1-\alpha'}$ et on se ramène au Cas 1
- Cas 4 : $\alpha = \frac{\alpha'}{1+\alpha'}$ et $\beta = \frac{\beta'}{1+\alpha'}$ et on se ramène au Cas 2

Pseudo-critère et les seuils

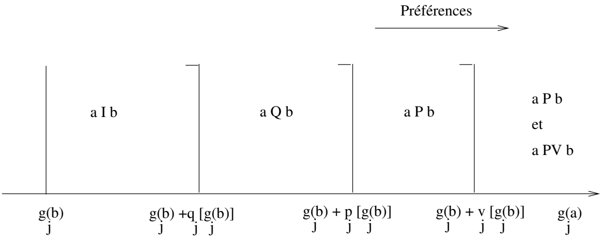


FIG. 13: Pseudo-critère et préférences (Cas 1).

Construction de la relation de surclassement valué

La relation est caractérisée par la définition d'un degré de surclassement $d(a, b) \in [0, 1]$ associé au couple (a, b).

$d(a, b)$, est d'autant plus grand que la solidité du surclassement de a par b est importante, c'est une fonction :

- croissante de $g_j(a)$
- décroissante de $g_j(b)$.

Construction de la relation de surclassement valué

Indice de concordance global :

$$C(a,b) = \frac{1}{\sum_j p_j} \sum_j p_j c_j(a,b)$$

- $C(a,b)$ exprime dans quelle mesure les performances de a et b sur tous les critères sont en concordance avec “a surclasse b”.
- $c_j(a,b)$ exprime dans quelle mesure on peut affirmer que, sur le critère j, “a est au moins aussi bonne que b”.

Indice de concordance $c_j(a, b)$ (cas 1).

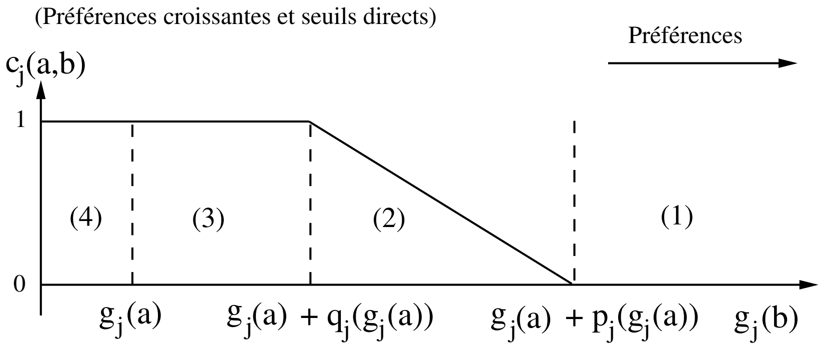
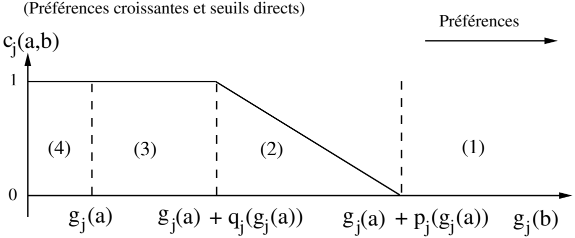


FIG. 14: Indice de concordance par pseudo-critère (cas 1).

Indice de concordance $c_j(a, b)$ (cas 1).



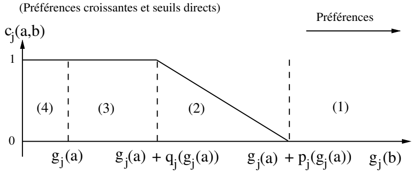
(1) $g_j(b) > g_j(a) + p_j[g_j(a)] \Rightarrow c_j(a, b) = 0$ (bP_ja)

(2) $g_j(a) + q_j[g_j(a)] < g_j(b) \leq g_j(a) + p_j[g_j(a)] \Rightarrow 0 < c_j(a, b) \leq 1$ (bQ_ja)

(3) $g_j(a) \leq g_j(b) \leq g_j(a) + q_j[g_j(a)] \Rightarrow c_j(a, b) = 1$ (bI_ja)

(4) $g_j(b) \leq g_j(a) \Rightarrow c_j(a, b) = 1$

Indice de concordance $c_j(a, b)$ (cas 1).

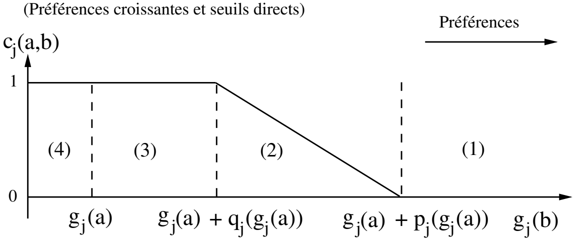


Remarques sur $c_j(b, a)$:
(1), (2), (3) $\Rightarrow c_j(b, a) = 1$

(4) $c_j(b, a)$ dépend de l'écart entre $g_j(a) - g_j(b)$ avec $q_j[g_j(b)]$ et $p_j[g_j(b)]$

- $g_j(a) - q_j[g_j(b)] \leq g_j(b) \Rightarrow c_j(b, a) = 1$ $(bI_j a)$
- $g_j(a) - p_j[g_j(b)] \leq g_j(b) < g_j(a) - q_j[g_j(b)] \Rightarrow 0 < c_j(b, a) \leq 1$ $(aQ_j b)$
- $g_j(b) < g_j(a) - p_j[g_j(b)] \Rightarrow c_j(b, a) = 0$ $(aP_j b)$

Indice de concordance $c_j(a, b)$ (cas 1).



Dans la zone (2) :

- $c_j(b, a) = 1$
- et par interpolation, $c_j(a, b) = \frac{p_j[g_j(a)] - [g_j(b) - g_j(a)]}{p_j[g_j(a)] - q_j[g_j(a)]}$

Finalement :

$$c_j(a, b) = \frac{p_j[g_j(a)] - \min[g_j(b) - g_j(a), p_j[g_j(a)]]}{p_j[g_j(a)] - \min[g_j(b) - g_j(a), q_j[g_j(a)]]}$$

Indice de disconcordance $D_j(a, b)$.

La relation de concordance $C(a, b) = \frac{1}{\sum_j p_j} \sum_j p_j c_j(a, b)$ peut être affaiblie par la notion de discordance, même si tous les critères sauf un, j_0, concordent avec avec "a est au moins aussi bonne que b".

- cas où l'écart $g_{j_0}(b) - g_{j_0}(a)$ est si grand qu'on ne peut pas ne pas en tenir compte.

Pour chaque couple $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, calculer $\{D_j(a, b), j = 1, \ldots, m\}$:

- où $D_j(a, b)$ exprime dans quelle mesure le critère j réfute "a est au moins aussi bonne que b"
- avec utilisation d'un seuil de veto pour le critère j

Indice de disconcordance $D_j(a, b)$ (cas 1).

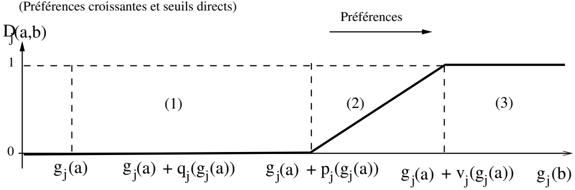
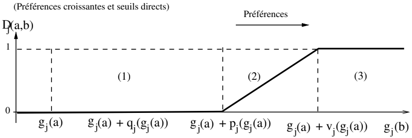


FIG. 15: Indice de discordance par pseudo-critère (cas 1).

$$D_j(a,b) = \min[1; \max[0; \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j[g_j(a)]}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]}]]$$

Indice de disconcordance $D_j(a, b)$ (cas 1).



Opposition à "a surclasse b" :

(1) $g_j(b) - g_j(a) \leq p_j[g_j(a)]$ et $D_j(a, b) = 0$ (pas d'opposition)

(2) $p_j[g_j(a)] < g_j(b) - g_j(a) < v_j[g_j(a)]$ et $0 < D_j(a, b) < 1$ (opposition faible) et $D_j(a, b) = \frac{g_j(b) - g_j(a) - p_j[g_j(a)]}{v_j[g_j(a)] - p_j[g_j(a)]}$

(3) $g_j(b) - g_j(a) \geq v_j[g_j(a)]$ et $D_j(a, b) = 1$ (opposition totale)

Relation de surclassement/degré de crédibilité $d(a, b)$.

La relation de surclassement floue est caractérisée par un degré de crédibilité $d(a, b)$ permettant d'exprimer dans quelle mesure "a surclasse b", compte-tenu :

- des indices de concordance
- des indices de discordance

$d(a, b)$ est :

- l'indice de concordance $C(a, b)$
- affaiblie par les indices de discordance $D_j(a, b)$

Remarque : $D_j(a, b)$ ne peut agir que s'il est suffisamment grand, *i.e* $D_j(a, b) > C(a, b)$

Relation de surclassement/degré de crédibilité $d(a, b)$.

Soit $\overline{\mathcal{F}}(a,b) = \{j \in \mathcal{F}, D_j(a,b) > C(a,b)\}$

$$d(a,b) = \begin{cases} C(a,b) \text{ si } \overline{\mathcal{F}}(a,b) = \emptyset \\ \\ C(a,b) \prod_{j \in \overline{\mathcal{F}}(a,b)} \frac{1-D_j(a,b)}{1-C(a,b)} \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarques :

- s'il existe un critère j tel que $D_j(a,b) = 1$, alors $d(a,b) = 0$
- s'il existe un ou plusieurs critères j tels que $0 \leq C(a,b) < D_j(a,b) < 1$ on ne tient pas compte des poids pour affaiblir $C(a,b)$ pour calculer $d(a,b)$

Algorithme de classement.

L'algorithme de classement a pour objectif d'exploiter la relation de surclassement floue en vue d'ordonner les actions selon un pré-ordre partiel obtenu à partir de deux préordres :

- le premier est construit de façon descendante en sélectionnant d'abord les meilleures actions pour terminer avec les plus mauvaises (distillation descendante)
- le second est construit de façon ascendante en sélectionnant d'abord les plus mauvaises actions pour terminer avec les meilleures (distillation ascendante)

Algorithme de classement – Construction des préordres

A l'étape k on fixe un niveau de coupe $\lambda_k \in [0,1]$ et un seuil de discrimination $s[d(a,b)]$.
La relation de surclassement nette $aS^{\lambda_k}b$ ne sera pris en compte dans le classement que si :

- $d(a,b) > \lambda_k$
- $d(a,b) > d(b,a) + s[d(a,b)]$.

C'est-à-dire que l'affirmation "a surclasse b" ne sera prise en compte que si elle est significativement plus crédible que l'affirmation "b surclasse a".

Algorithme de classement – Construction des préordres

On calcule alors pour toute action a :

- $p^\lambda(a)$ la λ-puissance de a (nombre d'actions surclassées par a)
  $p^\lambda(a) = |\{b \in A \;/\; aS^\lambda b\}|$
- $f^\lambda(a)$ la λ-faiblesse de a (nombre d'actions surclassant a)
  $f^\lambda(a) = |\{b \in A \;/\; bS^\lambda a\}|$
- $q^\lambda(a)$ la λ-qualification de a
  $q^\lambda(a) = p^\lambda(a) - f^\lambda(a)$.

Algorithme de classement – Phase de distillation

- A partir de la qualification :
  - préordre descendant : sélectionner la ou les meilleures actions
  - préordre ascendant : sélectionner la ou les plus mauvaises actions
- Les extraire de l'ensemble des actions à classer.
- Sur l'ensemble des actions restantes :
  - calculer à nouveau les qualifications
  - sélectionner les actions
  - réitérer l'opération

Deux préordres : classes d'équivalence ordonnées.

Algorithme de classement – Préordre intersection

Le graphe final est obtenu par intersection des deux préordres calculés par l'algorithme de distillation :

- a est mieux classée que b dans le préordre final si a est mieux classée que b dans l'un des deux préordres et au moins aussi bien classée que b dans l'autre
- a est indifférente à b dans le préordre final si elles sont indifférentes dans les deux préordres
- a est incomparable à b dans le préordre final si a est mieux classée que b dans l'un des deux préordres et b est mieux classée que a dans l'autre.

Algorithme de classement.

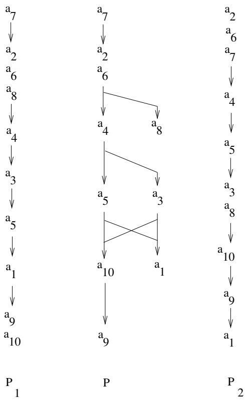


FIG. 16: Exemple - Construction du préordre intersection final

Graphe final

$a, b \in A$, quatre possibilités :

- a est meilleure que b
- b est meilleure que a
- a et b sont identiques
- a et b sont incomparables

Autres résultats

- résultats des deux distillations
- rang de chaque action dans le préordre final (masque les incomparabilités)
- préordre médian : préordre complet construit à partir du préordre partiel en utilisant les rangs du préordre final (masque les incomparabilités)
- la matrice du préordre final : P, I, R, P^-

Robustesse

Les poids.
Les performances.
Les seuils.
Les seuils de discrimination, les niveaux de coupe.
Etc.

Conclusions

- méthodes réalisant des comparaisons par paires d'actions
- méthodes non compensatoires
- incomparabilité
- surclassement établi en deux étapes :
  - construction de S
  - exploitation de S
- exploitation est guidée par la problématique
- il existe de nombreuses méthodes (pas uniquement *famille* ELECTRE)

Autres méthodes . . .

Prométhée I

- Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations
- Information "intra-critère" : fonctions de préférence. Information "inter-critère" : poids.
- Prométhée I utilise les flux de surclassement entrant et sortant.

Prométhée II

- Item Promethée I mais utilise les flux nets, relation d'ordre.

Gaia

- Geometrical Analysis for Interactive Assistance
- Cherche à décrire la structure du problème par le passage des évaluations aux flux unicritère. Chaque action est un point dans l'espace des critères.
- Utilisation de l'ACP pour projeter les points de facon optimale.

Hugonnard, J. et Roy, B. (1982).
Le plan d'extension du métro en banlieue parisienne, un cas type d'application de l'analyse multicritère.
Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports, (6):77–108. 1er trimestre.

Roy, B. (1978).
ELECTRE III : un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples.
20(1):3–24.

Roy, B. (1985).
Méthodologie multicritère d'aide à la décision.
Ed. Economica, collection Gestion.

Roy, B. et Bouyssou, D. (1993).
Aide multicritère à la décision : méthodes et cas.

Ed. Economica, collection Gestion.

Vincke, P. (1977).
Quasi-kernels of minimum weakness in a graph.
Discrete Mathematics, (20):187–192.

Vincke, P. (1989).
L'Aide Multicritère à la Décision.
Editions Ellipses - Editions de l'Université de Bruxelles.